EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures Coefficient : 3

On considère l'espace vectoriel réel $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ rapporté à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit M la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Question n° 01 :

On peut dire que toute matrice M

a) est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

b) est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

Si $P(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice M

c) Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ est que $P(\lambda)$ ait deux racines réelles et distinctes.

d) Le coefficient du monôme de premier degré en λ dans $P(\lambda)$ est la trace de la matrice.

Soit la matrice A représentant dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ l'endomorphisme f.

$$A = \begin{pmatrix} 85 & -112 \\ 60 & -79 \end{pmatrix}$$

On note P la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, et on suppose que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}=(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$.

Question n° 02 :

I (resp O) désigne la matrice carrée unité (resp nulle) d'ordre 2.

Le calcul du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de A montre que la matrice A vérifie

a) $A - I = O$ ou $A - 5I = O$.

b) $(A - I)(A - 5I)^2 = O$.

A est inversible et

c) $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 6I)$.

d) $A^{-1} = \frac{1}{5}(-A - 6I)$.

Question n° 03 :

On appelle λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ leurs sous espaces propres respectifs (On suppose $\lambda_1 < \lambda_2$).

a) A n'admet qu'une et une seule valeur propre

Dans le cas où les valeurs propres existent et sont distinctes alors

b) $\mathcal{B}'$ est une base de vecteurs propres.

c) P est une matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base de vecteurs propres.

d) P n'étant pas inversible ne peut être une matrice de vecteurs propres.

Question n° 04 :

Pour l'endomorphisme f, on a les propriétés suivantes

a) $f - id$ est surjectif mais n'est pas injectif.

b) $f - 5\,id$ est bijectif.

c) $\mathrm{Im}(f-id)$ et $\mathrm{Im}(f-5\,id)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathcal{E}$.

d) $\mathrm{Im}(f-id)$ et $\mathrm{Im}(f-5\,id)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$.

Question n° 05 :

La matrice A est

a) trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

b) diagonalisable uniquement dans $\mathbf{C}$ car les valeurs propres ne sont pas réelles.

c) nilpotente ($\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O$).

d) non nilpotente.

Question n° 06 :

Il est possible de déterminer deux suites (α_n) et (β_n) telles que

$$A^n = \alpha_n\, A + \beta_n\, I, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) L'assertion ci-dessus est fausse car les matrices carrées d'ordre 2 forment un espace vectoriel de dimension 4, ce qui prouve que A^n est combinaison linéaire de A^3, A^2, A et I.

Si l'assertion ci-dessus est jugée vraie alors

b) $\alpha_n = \lambda + \mu\, 5^n$ où λ et μ ont des valeurs convenables.

c) $\beta_n = -5\,\alpha_n\ \forall n$.

d) $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Dans la suite, on considère le plan affine $\mathcal{P}$ associé à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, rapporté au repère Oxy ($\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires des axes respectifs Ox et Oy), et la suite $(M_n(x_n, y_n))\ n \in \mathbb{N}$ de points de $\mathcal{P}$ définis par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 85\,x_n - 112\,y_n \\ y_{n+1} = 60\,x_n - 79\,y_n \end{cases}$$

où x_0 et y_0 sont donnés. On pose $z_n = 3\,x_n - 4\,y_n$.

Question n° 07 :

La suite (z_n) est

a) une suite arithmétique de raison 5.

b) une suite géométrique de raison 5.

On peut dire de plus que si z_0

c) est non nul alors z_n est non nul pour tout n.

d) est nul alors la suite $\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

Question n° 08 :

Un calcul montre que le rapport $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$

a) est égal à $\dfrac{5}{7}$, pour tout M_0.

b) dépend de n.

On peut déduire de ce qui précède que les suites (x_n) et (y_n)

c) ne sont jamais constantes.

d) ne sont constantes que pour une valeur unique de z_0.

Question n° 09 :

Pour tout n, le vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$

a) est colinéaire à un vecteur $\vec{w}$ (fixe). b) est colinéaire à $\vec{i}$.

On peut dire que les points M_n pour $n \geq 1$

c) ne sont pas tous sur une même droite affine passant par M_0.

d) sont, soit tous alignés avec M_0 et tous distincts, soit tous confondus avec M_0.

Question n° 10 :

Si le point M_n a pour coordonnées (u_n, v_n) dans le repère Ouv ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant les vecteurs définis au début), alors

a) $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = 5\,v_n$.

On peut en déduire que tous les points M_n

c) s'ils sont distincts sont alignés sur une droite parallèle à $\vec{u}$.

d) sont situées, $\forall z_0 \in \mathbb{R}$, sur une droite affine de direction un sous espace propre de f.

Soit la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 \mathrm{Inf}(x, t)\, f(t)dt$$

où f est une fonction continue sur [0, 1]. On rappelle que

$$\mathrm{Inf}(x,t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq t \\ t & \text{si} \quad x \geq t \end{cases}$$

On note $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ et $B = \displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\,dt$.

On suppose dans les trois questions suivantes que $f(t) = \sin \pi t$.

Question n° 11 :

a) $A = \dfrac{1}{\pi}$. b) $A = 2B$. c) $B = \dfrac{1}{\pi}$. d) $B = 2A$.

Question n° 12 :

La dérivée seconde g'' de g

a) n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

La dérivée première g' de g

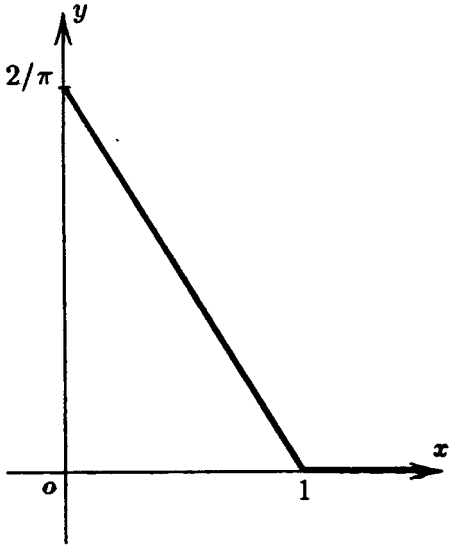
c) est de classe C^1 sur $]0, 1[$.

d) n'est pas de classe C^1 sur $]0, 1[$.

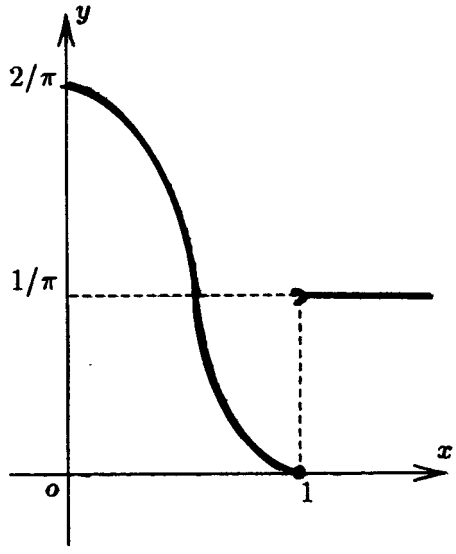
Question n° 13 :

Sur $[0, +\infty[$ la courbe représentative de g' est

a)

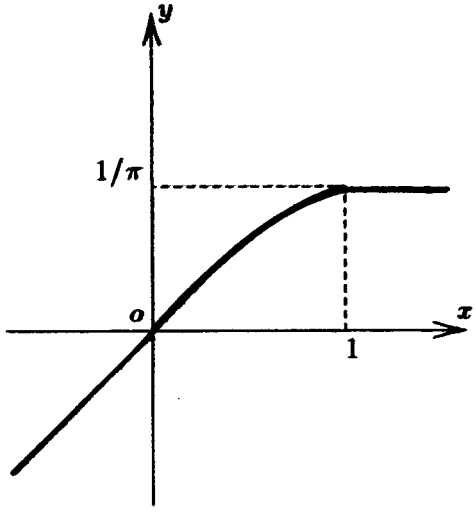


b)

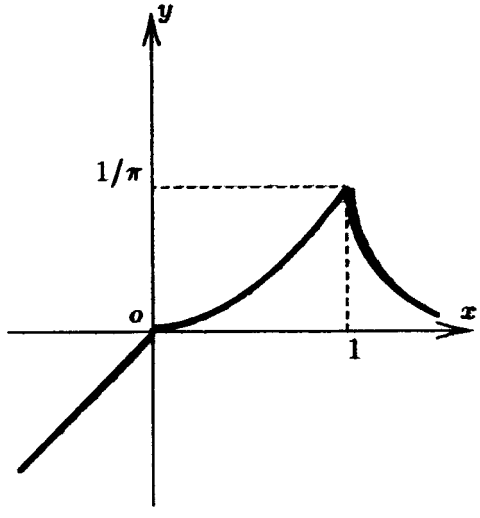


Sur $]-\infty, +\infty[$ la courbe représentative de g est

c)



d)



Dans les trois questions suivantes, la fonction f est quelconque et l'on considère la restriction de la fonction g à l'intervalle $[0, 1]$.

Question n° 14 :

a) il faut que f soit dérivable pour que g soit continue.

b) g est dérivable mais non de classe C^1.

La dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ est

c) nulle.

d) égale à $\int_x^1 f(t)\,dt$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et U l'application de $\mathcal{E}$ dans lui même qui à f associe g.

Question n°15 :

On peut dire que U

a) n'est pas linéaire car $\mathrm{Inf}(x,t)$ dépend de x.

b) n'est pas injective.

c) est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

d) n'est pas surjective.

Question n° 16 :

Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre non nulle de U et h un vecteur propre associé. Alors sur [0, 1]

a) h est de classe C^1

b) h vérifie l'équation différentielle

$$h(x) = \lambda\, h'(x).$$

c) $h'(0) = h'(1) = 0$.

d) si λ est de la forme $\dfrac{1}{\alpha^2}$ alors α est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On considère la famille $\mathcal{F}$ de fonctions polynôme définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par

$$P_n(x) = \left(x^2 - 1\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction P_n dans le repère Oxy.

Question n° 17 :

On peut dire que P_n est pour tout n

a) une fonction polynôme paire et de degré n.

b) une fonction polynôme impaire et de degré $2n$.

c) Le produit des zéros de P_n est nul.

d) La somme des zéros de P_n vaut 1.

On suppose dans les trois questions suivantes $n \geq 3$.

Question n° 18 :

On peut dire que

a) P_n n'est dérivable que jusqu'à l'ordre $2n$.

b) P_n est de classe C^∞.

c) Le produit et la somme des zéros de P_n' sont égaux à 1.

d) Il y a exactement trois zéros distincts de P_n' (à un ordre de multiplicité éventuel prés).

Question n° 19 :

Si n est pair, alors la courbe $\mathcal{C}_n$

a) admet deux extremums.

b) est concave sur $[-1, 0]$.

c) admet deux points d'inflexion.

d) est symétrique par rapport à O.

Question n° 20 :

Si n est impair, alors la courbe C_n

a) admet quatre extremums.

b) est convexe sur $[-1,0]$.

c) admet quatre points d'inflexion.

d) est symétrique par rapport à l'axe Oy.

On pose $Q_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ et $Q_0(x) = 1$. On pourra remarquer qu'il est possible d'écrire $P_n(x) = (x-1)^n (x+1)^n$.

Question n° 21 :

a) Q_n est un polynôme de degré n.

b) Q_n et P_n ont la même parité.

Plus précisément, le coefficient du monôme de plus haut degré de Q_n est

c) égal à 1.

d) différent de 1.

Question n° 22 :

Etude des zéros de Q_n pour tout n entier.

a) -1 et 1 sont deux zéros de Q_n.

b) -1 et 1 sont les seuls zéros de Q_n.

c) Q_n admet exactement n zéros, dans $\mathbb{R}$, distincts deux à deux.

d) Q_n admet au moins un zéro double.

$\mathbb{R}[X]$ (resp $\mathbf{C}[X]$) désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp dans $\mathbf{C}$).On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Question n° 23 :

Les zéros de $X^3 + 1$ sont

a) $1, -j, -\overline{j}$.

b) $-1, j, \overline{j}$.

Les polynômes $X^2 - X + 1$ et $X + 1$

c) ont un zéro commun.

d) des zéros distincts.

Question n° 24 :

Il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la condition

$$(X^2 - X + 1)U + (X + 1)V = 1 \qquad (1)$$

a) L'assertion (1) est fausse.

Dans le cas où l'assertion (1) est jugée vraie alors

b) (1) admet un couple (U, V) pour solution unique

c) Un couple (U, V) solution de (1) est

$$U = \frac{1}{3}, \quad V = \frac{1}{3}(-X + 2).$$

d) Il existe une infinité de couples (U, V) solution de (1).

Question n° 25 :

Soit le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Sa décomposition sous la forme $P(X) = \alpha + \beta(X+1) + \gamma(X^2 - X + 1)$

a) est possible de plusieurs façons.

b) est telle que $\alpha = c - b - 2a$, $\gamma = a$.

On pose $F(X) = \dfrac{P(X)}{X^3+1}$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de F est de la forme $F(X) = \dfrac{B(X)}{X+1} + \dfrac{C(X)}{X^2-X+1}$ avec

c) $B(X) = \dfrac{1}{3}(a+b+c)$
$C(X) = \dfrac{1}{3}[(2a+b-c)X - a + b + 2c]$.

d) $B(X) = \dfrac{1}{3}(a-b+c)$
$C(X) = \dfrac{1}{3}[(2a+b-c)X - a + b + 2c]$.

Soit la série de fonctions de la variable réelle x de terme général défini pour n entier naturel positif ou nul par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

Quand elle converge, sa somme est notée $f(x)$ et le domaine de définition de l'application f est noté D. On note e le réel dont le logarithme népérien est 1.

Question n° 26 :

On peut dire que D est inclus (au sens large) dans

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}^*$.

c) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

d) $\mathbb{R} - \mathbb{N}$.

Question n° 27 :

La quantité $f(1)$

a) n'existe pas car $1 \notin D$.

b) est la somme d'une série alternée semi-convergente.

La valeur de $f(1)$ est

c) e^{-1}.

d) 1−e.

Question n° 28 :

Le développement en série entière de e^{-t^2}

a) a pour rayon de convergence $+\infty$.

b) qui est composé de termes tous positifs, est d'après la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de cette série, intégrable terme à terme sur $[0, x]$ pour tout x réel.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. On a alors

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

d) $F(1) = f(\frac{1}{2})$.

Question n° 29 :

Sur D, la quantité $xf(x) - f(x+1)$

a) est nulle. b) dépend de n. c) vaut $\frac{1}{e} - 1$. d) vaut $\frac{1}{e}$.

n est un entier naturel non nul dans les deux questions suivantes

Question n° 30 :

Dans cette question, on pose $l_n = n\,f(n) - f(n+1)$. La suite (l_n)

a) n'est pas définie à partir d'un indice n assez grand car $f(n)$ est alors infini.

b) est convergente.

La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{l_k}{k!}$ a pour limite en $+\infty$

c) $+\infty$. d) 0.

Question n° 31 :

D'aprés la question précédente, la quantité $f(n)$ vaut

a) $n!\left(1 + \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)$. b) $(n-1)!\left(1 + \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)$.

On en déduit que, pour n très grand, $f(n)$

c) est équivalente à $(n-1)!$. d) est infiniment petit devant $(n-1)!$.

On considère dans les questions suivantes C un segment fermé et borné de $D \cap \mathbb{R}^+$ et K_p un segment fermé borné de $D \cap [-p-1, -p]$ où p est un entier naturel fixé.

Question n° 32 :

L'inégalité $\forall x \in C,\ |u_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$

a) est vraie à partir du rang $n = 0$.

b) n'est vraie qu'à partir d'un indice n dépendant de C.

On en déduit que sur C, la série $\{u_n(x)\}$ est

c) absolument convergente mais non uniformément convergente.

d) normalement convergente.

Question n° 33 :

L'inégalité $\forall x \in K_p,\ |u_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$

a) est vraie à partir du rang $n = 0$.

b) n'est vraie qu'à partir d'un indice n dépendant de p.

On en déduit que sur K_p, la série $\{u_n(x)\}$ est

c) uniformément convergente mais pas normalement convergente.

d) normalement convergente.

Question n° 34 :

On déduit des questions précédentes que f est continue

a) sur C et sur K_p.

b) sur D.

c) sur l'intérieur de C mais non continue aux bornes de D.

d) seulement sur un domaine strictement inclus dans D.

Soit dans la suite les séries $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ de termes généraux respectifs définis pour $n \geq 0$ par

$$v_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+x)^2} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+x)^3}.$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 0.

Question n° 35 :

Sur C, les séries $\{v_n(x)\}$ et $\{w_n(x)\}$

a) sont normalement convergentes.

b) ne sont pas uniformément convergentes.

Sur l'intervalle $[a, +\infty[$, où $a > 0$, les séries $\{v_n(x)\}$ et $\{w_n(x)\}$

c) sont uniformément convergentes.

d) ne sont pas normalement convergentes.

Question n° 36 :

Soit respectivement $v(x)$ et $w(x)$ les sommes, sur les ensembles où elles existent, des séries $\{v_n(x)\}$ et $\{w_n(x)\}$. Alors v et w

a) sont continues sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

b) sont intégrables sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

L'égalité $f'(x) = v(x)$

c) est vraie sur D.

d) n'est vraie que sur un sous-ensemble strict de D car $\{v_n(x)\}$ n'est pas uniformément convergente sur D.

Question n° 37 :

On en déduit que f

a) est de classe C^2 sur D.

b) est de classe C^∞ sur D.

c) n'est pas de classe C^∞ sur D mais sur un domaine strictement inclus dans D.

d) n'est pas de classe C^∞ sur D car à partir de la dérivée nième de $u_n(x)$, le terme $n!$ disparait au dénominateur de son expression.

Question n° 38 :

On pose dans cette question $I = D \cap]0, +\infty[$ et on suppose que $x \in I$.

Alors f'

a) vérifie la double inégalité

$$-\frac{1}{x^2} < f'(x) < -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

b) garde un signe constant sur I.

et f''

c) vérifie la double inégalité

$$-\frac{2}{x^3} < f''(x) < -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}.$$

d) change de signe sur I.

Question n° 39 :

On étudie dans cette question le comportement de la fonction f au voisinage de 0. Et l'on considère la somme $g(x)$ de la série $\{u_n(x)\}$ indéxée à partir du rang $n = 1$. On peut dire que g

a) a le même domaine de définition D que f.

b) est continue en 0 avec $g(0) = -\frac{1}{e}$.

On en déduit que

c) $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$.

d) $f(x)$ est équivalente au voisinage de 0 à une fonction de la forme $\frac{A}{x}$ où A est une constante réelle non nulle.

Question n° 40 :

On étudie dans cette question le comportement de la fonction f au voisinage de $\pm\infty$.

La limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est

a) différente de $\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x)$ car la convergence de la série $\{u_n(x)\}$ n'est pas uniforme au voisinage de $+\infty$.

b) nulle.

La limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est

c) nulle car $\{u_n(x)\}$ est une série uniformément convergente au voisinage de $-\infty$.

d) égale à sa limite en $+\infty$.

Question n° 41 :

Dans cette question, on suppose $x \in]-1, 0[$. Alors

a) $\lim_{x \to -1+} f'(x) = -\infty$.

b) d'une façon générale : Si dans une série alternée $\{t_n\}$ $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$ alors la série converge et sa somme T est, $\forall n \in \mathbf{N}$ comprise entre $\sum_{k=0}^{n} t_k$ et $\sum_{k=0}^{n+1} t_k$.

c) $f''(x)$ reste de signe fixe pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1, 0[$.

d) $f(x)$ présente un unique extrémum du type minimum sur l'intervalle $]-1, 0[$.

Soit la courbe $\mathcal{C}$ dont une équation polaire est

$$\rho = \sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}$$

dans le repère orthonormé Oxy.

Question n° 42 :

La fonction ρ est périodique et de période

a) 2π.

b) 4π.

La fonction ρ est

c) paire, ce qui permet de ramener l'étude de $\mathcal{C}$ à l'intervalle [-π,π].

d) impaire, ce qui permet de ramener l'étude de $\mathcal{C}$ à l'intervalle [-π,π].

Question n° 43 :

La courbe $\mathcal{C}$ admet pour axe de symétrie

a) l'axe Ox.

b) l'axe Oy.

La courbe $\mathcal{C}$

c) admet une droite asymptote.

d) est bornée.

Question n° 44 :

On peut dire que sur $[-\pi, +\pi]$

a) ρ s'annule une et une seule fois.

b) ρ change de signe deux fois.

On peut dire que ρ est strictement positive

c) sur $[-\frac{\pi}{3}, \pi]$.

d) seulement sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

Question n° 45 :

Etude de la fonction dérivée ρ' sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Si l'on pose $X = \sin \frac{\theta}{2}$. Alors

a) $\rho' = 4X^2 + X - 2$.

b) ρ' admet deux zéros simples.

Si l'assertion b) est vraie, alors si l'on note θ_1 et θ_2 les deux zéros de ρ'.

c) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

d) $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi$.

Question n° 46 :

On note de manière classique V l'angle compris entre le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ en un point M de $\mathcal{C}$ et le vecteur tangent $\vec{\tau}$ en ce point. Alors

a) $\tan V = \frac{\rho'}{\rho}$.

b) $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$.

c) sur l'intervalle $]-\pi, 0[$, il existe exactement deux valeurs de θ pour lesquelles $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{\tau}$ sont orthogonaux.

d) sur l'intervalle $]-\pi, 0[$, il existe une et une seule valeur de θ pour laquelle $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{\tau}$ sont colinéaires.

Question n° 47 :

Soit la courbe $\mathcal{C}'$ dont une équation polaire est

$$\rho = \cos\theta + \sin\frac{\theta}{2}$$

dans le repère orthonormé Oxy.

a) Les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont confondues.

b) Les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y + x = 0$.

Dans un voisinage de 0, nous avons le développement limité

$$\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2} = 1 + \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{2} + o\left(\theta^2\right).$$

On peut dire qu'au point correspondant à $\theta = 0$, la courbe $\mathcal{C}'$ admet

c) un point d'inflexion.

d) un point de rebroussement de première espèce.

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}$$

construite dans le repère orthonormé Oxy.

Question n° 48 :

Au point $t = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ admet

a) une branche infinie parabolique.

b) une asymptote parallèle à la première bissectrice des axes de coordonnées.

Au point $t = 1$, la courbe $\mathcal{C}$ admet

c) une branche infinie.

d) une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

Question n° 49 :

Une élimination entre x et y du paramètre t montre qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est

a) $x^2 - y^2 + 4x = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

On peut dire que

c) $\mathcal{C}$ est formée de deux paraboles.

d) $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère.

Question n° 50 :

On considère la courbe $\mathcal{C}'$ d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\sin t - 1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\sin t - 1}$$

construite dans le repère orthonormé Oxy.

On peut dire que

a) $\mathcal{C}'$ est incluse dans $\mathcal{C}$ (Au sens strict).

b) $\mathcal{C}$ est incluse dans $\mathcal{C}'$ (Au sens strict).

On considère la restriction de $\mathcal{C}'$ à l'intervalle $]-\pi, 0[$.

c) Cette restriction est située sur la droite d'équation $y = x$.

d) Cette restriction contient au moins un point double.
